<u>Πανελλαδικές Εξετάσεις Ημερήσιων & Εσπερινών ΓΕΛ</u>

<u>Μαθηματικά Προσανατολισμού</u>

Τρίτη 6 Ιουνίου 2023

<u>Ενδεικτικές απαντήσεις</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 111

Μονάδες 6

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 104

Μονάδες 4

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 128

Μονάδες 5

Α4.

α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{g\circ h}=\left\{x\in D_h / h(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in(0,+\infty)/\ln x\in\mathbb{R}\right\}=(0,+\infty)$

$$f(x)=g\left(h(x)\right)-g(\ln x)=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-x^2}{x}$$

Μονάδες 5

Β2. i) $f'(x)=\dfrac{-2x^2-\left(4-x^2\right)}{x^2}=\dfrac{-x^2-4}{x^2}<0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}\Leftrightarrow\dfrac{4-\pi^2}{\pi}<\dfrac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow f(\pi)<f(e)$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, $\pi>e$ που ισχύει.

Μονάδες 8

Β3. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4-x^2}{x}\overset{\frac{4}{0}}{\underset{x>0}{=}}+\infty$ άρα η $x=0$ και ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

Άρα η $\boxed{y=-x}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Μονάδες 8

B4. $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)}\right| \le \frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|} \Leftrightarrow -\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)} \le \frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|}$

με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2} = 0$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{f\left(x\right)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f\left(x\right)} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)} = 0$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\int_2^3 xf\left(x\right)dx = \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = \int_2^3 \left(1+\alpha x\right)dx = \left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3 =$

$= \left(3+\frac{9\alpha}{2}\right) - \left(2+\frac{4\alpha}{2}\right) = 1+\frac{9\alpha}{2}-\frac{4\alpha}{2} = 1+\frac{5\alpha}{2}$ (1)

Αφού $\int_2^3 xf\left(x\right)dx = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1+\frac{5\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Μονάδες 4

Γ2. i) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\left(x-2\right) = -1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)}{x(x-1)}=-1$$

Άρα $f'(1)=-1$ και ορίζεται η εφαπτομένη στο $x_0=1$.

ii) $f(1)=1$

ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-1=-(x-1)$

$\boxed{y=-x+2}$

$$\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\varepsilon\varphi}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow \omega=\frac{3\pi}{4}$$

Μονάδες 8

Γ3. Για $x<1$: $f'(x)=2x-3$

Για $x>1$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$ $+\infty$
$2x-3$	$-$		
$-\frac{1}{x^2}$		$-$	$-$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Αφού η f συνεχής στο $x_0=1$, η f είναι γνησίως φθίνουσα παντού και άρα 1-1.

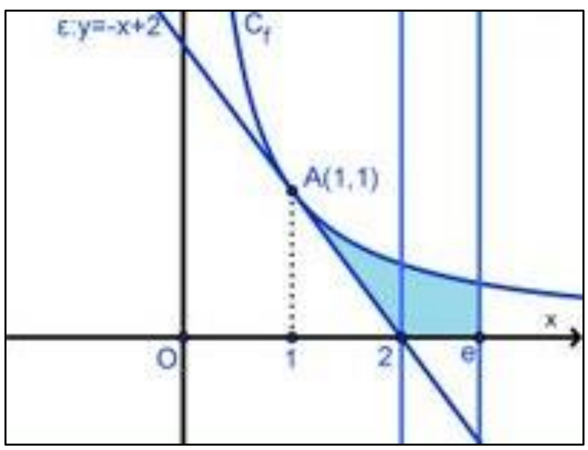
$$f\left(D_f\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=+\infty$

Μονάδες 6

Γ4. $E(\Omega)=\int_1^e |f(x)|dx-(AB\Gamma)=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{(A\Gamma)(B\Gamma)}{2}=$

$$=\left[\ln|x|\right]_1^e-\frac{1\cdot 1}{2}=(\ln e-\ln 1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$



Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Α΄ τρόπος:

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa-2x\right]=-1+\kappa-2=\kappa-3$ και $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

Αν $\kappa-3\neq 0$ θα είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει $\kappa=3$

Άρα πρέπει αφού $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$

Β΄ τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$, $x\in(0,1)\cup(1,2)$ με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\ell\in\mathbb{R}$

.

Τότε $f(x)=g(x)(x-1)+2x\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)(x-1)+2x\right)=\ell\cdot 0+2=2$

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ θα είναι $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)\Leftrightarrow\kappa-1=2\Leftrightarrow\kappa=3$

Μονάδες 4

Δ2. Είναι $f'(x)=\frac{(2-x)'}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2-x+2}{(2-x)x^2}$

Έχουμε $-x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$

Ο πίνακας μονοτονίας της f :

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Ο.Μ. $f(1)=2$		

Έχουμε ακόμη: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right]=-\infty$ και

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right]=\lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)-\frac{1}{2}+3\overset{2-x=u}{=}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\ln u+\frac{5}{2}=-\infty$$

Έτσι ο προηγούμενος πίνακας γίνεται:

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$		$f(1)=2$		$-\infty$

Αν $\mathrm{A}_1=(0,1]$ είναι $f(\mathrm{A}_1)=(-\infty,2]$

και αν $A_2=[1,2)$ είναι $f(A_2)=(-\infty,2]$

$0\in f(A_1)$ οπότε η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_1 στο $(0,1]$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$0\in f(A_2)$ οπότε η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_2 στο $(1,2)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο $[1,2]$.

Έτσι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

Είναι όμως $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{5}{3}-\frac{1}{\frac{1}{3}}+3=\ln\frac{5}{3}>0$.

Έτσι αν $B=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ είναι $f(B)=\left(-\infty,\ln\frac{5}{3}\right)$ και $0\in f(B)$. Επομένως η ρίζα x_1 είναι μικρότερη του $\frac{1}{3}$, δηλαδή $x_1<\frac{1}{3}$.

Μπορούσαμε να δείξουμε ότι $x_1<\frac{1}{3}$ και ως εξής:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και $x_1,\frac{1}{3}\in(0,1)$ οπότε θα είναι

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{5}{3}>0$ και μετά $f\left(\frac{1}{3}\right)>0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)>f(x_1)\Leftrightarrow\frac{1}{3}>x_1$

Μονάδες 6

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1,1)$. Άρα υπάρχει

$$\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1) \text{ με } f'(\xi_1)'=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-0}{\frac{1-3x_1}{3}}=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Έχουμε ακόμη $f''(x)=\left(-\frac{1}{2x}\right)'+\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{(2-x)'}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^3}=-\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^3}<0$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα κι έτσι τα $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ είναι μοναδικό.

Μονάδες 6

Δ4. Αφού F και G είναι δύο αρχικές της f , θα είναι $F(x)=G(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

i) Είναι $F(x_2)=G(x_2)+c=0+c=c$ και $F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow 0=G(x_1)+c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G(x_1)=-c$

Έτσι $F(x_2)+G(x_1)=c-c=0$

(Μονάδες 4)

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση h με

$h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)+2x-x_1-x_2$ στο $[x_1,x_2]$

Είναι $h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)+2x_1-x_1-x_2$

$= x_1 \cdot 0 + x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 =$

$\overset{(i)}{=} - x_2 F(x_2) + x_1 - x_2$

και $h(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) + 2x_2 - x_1 - x_2 =$

$= x_1 F(x_2) + x_2 \cdot 0 + x_2 - x_1 =$

$= x_1 F(x_2) + x_2 - x_1$

Έχουμε $F'(x) = f(x) > 0$ στο (x_1, x_2) διότι η f διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2) και είναι $f(1) = 2 > 0$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ οπότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow F(x_1) < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x_2)$

Έτσι $h(x_1) < 0$ αφού $-x_2 F(x_2) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$ και $h(x_2) > 0$ αφού $x_1 F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$

Άρα αφού η h είναι και συνεχής στο $[x_1, x_2]$ σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[x_1, x_2]$.

Επίσης $h'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 =$

$= x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$ στο (x_1, x_2)

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ και επομένως η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Τελικά η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει μοναδική ρίζα στο (x_1,x_2).

Μονάδες 9